Fundamente de informatică

Logica predicatelor (cont.)

Marius Minea
marius@cs.upt.ro

http://www.cs.upt.ro/~marius/curs/fi

1 noiembrie 2011

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un înțeles pentru fiecare simbol din formulă:

O *interpretare* (*structură*) I pt. limbajul de predicate $\mathcal{L}$ constă din:
 o mulțime nevidă U numită *universul* sau *domeniul* lui I
  (mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele)
 pentru orice simbol de constantă c, o valoare $c_I \in U$
 pentru orice simbol de funcție n-ară f, o funcție $f : U^n \Rightarrow U$
 pentru orice simbol de predicat n-ar P, o submulțime $P_I \subseteq U^n$.

Exemplu:
$\forall x.P(x, x)$ reflexivitate
$\forall x.\forall y.\forall z.P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)$ tranzitivitate
De exemplu: universul U = numere reale; predicatul P: relația $\leq$

$\forall x.\forall y.P(x, y) \rightarrow \exists z.P(x, z) \wedge P(z, y)$
 găsiți două interpretări în care e adevărat / fals ?

Interpretări și evaluări

Fie I o interpretare cu univers U pentru $\mathcal{L}$,
și fie V mulțimea tuturor simbolurilor de variabile din $\mathcal{L}$.

O *evaluare* este o funcție $s : V \Rightarrow U$.
Extinzând evaluarea s la termeni și formule obținem o funcție de adevăr pentru formulele din $\mathcal{L}$. Notăm $I \models s(\varphi)$ sau $I \models \varphi[s]$.

Definim: $I \models s(\forall x \varphi)$ dacă $I \models s_{x \leftarrow d}(\varphi)$ pentru orice $d \in U$,
unde $s_{x \leftarrow d}(v) = \begin{cases} d & \text{dacă variabila } v \text{ este } x \\ \mathrm{s(v)} & \text{pentru orice altă variabilă } v \end{cases}$

Notăm $I \models \varphi$ dacă $I \models s(\varphi)$ pt. orice evaluare s.
Spunem că I e un *model* pt. φ.

Axiomele calculului predicatelor

Definim: variabila x se poate *substitui* cu termenul t în $\forall y\varphi$ dacă:

x nu apare liber în φ (substituția nu are efect) sau

y nu apare în t și x se poate substitui cu t în φ

A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

A4: $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$

A5: $\forall x\alpha \to \alpha[x \leftarrow t]$, dacă x poate fi substituit cu t în α

A6: $\alpha \to \forall x\alpha$ dacă x nu apare liber în α

Pentru egalitate, adăugăm și

A7: $x = x$

A8: $x = y \to \alpha = \beta$

unde β se obține din α înlocuind oricâte din aparițiile lui x cu y.

Consistență și completitudine

Fie H o mulțime de formule și φ o formulă.
Spunem că H implică φ ($H \models \varphi$) dacă pentru orice interpretare I,

$$I \models H \text{ implică } I \models \varphi$$

.

Calculul predicatelor de ordinul I este consistent și complet (la fel ca și logica propozițională):

$$H \vdash \varphi \text{ dacă și numai dacă } H \models \varphi$$

Obs: există și altă noțiune de completitudine:
dacă din axiome se poate deduce orice formulă (sau negația ei).
Întrebarea dacă $H \vdash \varphi$ este în general nedecidabilă.

Cum demonstrăm? Transformarea în formă clauzală

Ca în logica propozițională, transformăm formula în formă clauzală.

8 paăși, printr-un exemplu.

Pornim de la
$\forall x[\neg P(x) \rightarrow \exists y(D(x,y) \wedge \neg(E(f(x),y) \vee E(x,y))] \wedge \neg\forall x P(x)$

(1) Eliminarea tuturor conectorilor în afară de $\wedge$, $\vee$, $\neg$:
$\forall x[\neg\neg P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg(E(f(x),y) \vee E(x,y)))] \wedge \neg\forall x P(x)$

(2) Translatarea negațiilor înăuntru, până la predicate:
$\forall x[P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg E(f(x),y) \wedge \neg E(x,y))] \wedge \exists x \neg P(x)$

(3) Redenumirea variabilelor, cu nume unic pt. orice cuantificator
$\forall x[P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg E(f(x),y) \wedge \neg E(x,y))] \wedge \exists z \neg P(z)$

Forma clauzală (cont.)

(4) Eliminarea cuantificatorilor existențiali (skolemizare)
Pentru $\exists y$ în interiorul lui $\forall x_1 \ldots \forall x_n$, introducem o *funcție* Skolem
$y = g(x_1, \ldots, x_n)$ (valoarea lui y depinde de $x_1, \ldots x_n$).
Pentru $\exists y$ în exterior, se alege o nouă *constantă* Skolem.
$\forall x[P(x) \vee (D(x, g(x)) \wedge \neg E(f(x), g(x)) \wedge \neg E(x, g(x)))] \wedge \neg P(a)$

(5) Se aduce la forma normală prenex (cuantificatorii $\forall$ în față):
$\forall x([P(x) \vee (D(x, g(x)) \wedge \neg E(f(x), g(x)) \wedge \neg E(x, g(x)))] \wedge \neg P(a))$

(6) Se elimină prefixul cu cuantificatorii universali (devin impliciți)
$[P(x) \vee (D(x, g(x)) \wedge \neg E(f(x), g(x)) \wedge \neg E(x, g(x)))] \wedge \neg P(a)$

(7) Se convertește la forma normală conjunctivă
$(P(x) \vee D(x, g(x))) \wedge (P(x) \vee \neg E(f(x), g(x)))$
$\wedge (P(x) \vee \neg E(x, g(x))) \wedge \neg P(a)$

(8) Se elimină $\wedge$ și se scriu disjuncții ca și clauze separate

Metoda rezoluției (în calculul propozițional)

Reprezentăm (ca de obicei) clauzele ca mulțimi de literali.
Rezolventul a două clauze C_1, C_2 în raport cu literalul l (pentru care $l \in C_1, (\neg l) \in C_2$) e clauza

$$\text{rez}_l(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{l\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg l\})$$

Exemplu: $\text{rez}_p(\{p, q, r\}, \{\neg p, s\}) = \{q, r, s\}$.

Propoziție: $C_1, C_2 \models \text{rez}_l(C_1, C_2)$.
Corolar: $C_1 \wedge C_2$ e realizabilă $\Leftrightarrow$ $\text{rez}_l(C_1, C_2)$ e realizabilă.

Determinăm realizabilitatea unei formule clauzale (CNF) adăugând rezolvenți, căutând să obținem clauza vidă (formulă nerealizabilă).
dacă nu mai putem crea rezolvenți, formula e realizabilă

Arătăm că φ e tautologie dovedind că $\neg\varphi$ e nerealizabilă.

Dacă avem m clauze cu l și n clauze cu $\neg l$, creem $m \cdot n$ rezolvenți și putem șterge cele $m + n$ clauze inițiale.

Rezoluția în calculul predicatelor

Considerăm două clauze A și B, și un predicat P.

Redenumim variabilele din B ca să nu fie comune cu A
(fiecare clauză are spațiul ei de variabile)

Alegem literalii $P_1, \ldots, P_k$ din A și $\neg P_{k+1}, \ldots \neg P_{k+l}$ din B
(toți cu predicatul P)

Unificăm termenii $\{P_1, \ldots P_k, P_{k+1}, \ldots P_{k+l}\}$
Fie σ substituția (cea mai generală) care rezultă.

Formăm clauza $(A \cup B \setminus \{P_1, \ldots P_k, P_{k+1}, \ldots P_{k+l}\})$, îi aplicăm substituția σ, și o adăugăm la mulțimea clauzelor.

Dacă repetând obținem clauza vidă, formula inițială nu e realizabilă.
Dacă nu mai putem crea rezolvenți noi, formula inițială e realizabilă.
Terminarea nu e garantată – logica predicatelor nu e decidabilă!