A: Oricine a câștigat un meci a pierdut un meci. B: Nimeni nu a câștigat toate meciurile. Formalizați afirmațiile. Sunt consistente? Echivalente? Demonstrați.

În primul rând, identificăm noțiunile din enunț care au semnificație înrudită, și anume verbele *a câștiga* și *a pierde*. Considerăm că un meci e fie câștigat, fie pierdut, deci înlocuim direct "pierdut" cu negația lui "câștigat". (În caz contrar, se vede că B nu implică A, putem avea o persoană cu un meci câștigat și unul la egalitate, ceea ce satisface B dar nu A.)

Ar mai fi de discutat dacă introducem noțiunea de a juca un meci (nimeni nu poate nici câștiga nici pierde un meci nejucat, de exemplu un meci între alți doi). Rămânem la varianta simplă de a asimila un meci unei probe, despre care se poate spune "câștigat" sau nu, adică "pierdut".

În al doilea rând, interpretăm "nimeni" și "oricine" ca referindu-se la toate elementele universului; altfel introducem un predicat *persoana* pentru a distinge ființe ("cine") de alte entități. Pe de altă parte, "câștigat" din A și B se referă doar la meciuri, deci avem nevoie de un predicat "meci". (Dacă nu apărea negația, puteam lucra direct cu un predicat "câștigă_meci".) Cu acestea, putem formaliza:

A: $\forall x \,.\, \exists y(m(y) \wedge c(x, y)) \rightarrow \exists z \,.\, m(z) \wedge \neg c(x, z)$

B: $\neg\exists x\forall y \,.\, m(y) \rightarrow c(x, y)$ sau, ducând negația spre interior $\forall x\exists y \,.\, m(y) \wedge \neg c(x, y)$

De remarcat că în A e vorba de două meciuri distincte, unul câștigat, y și unul pierdut, z.

Pentru echivalența lui A cu B trebuie să arătăm $A \rightarrow B$ și $B \rightarrow A$. Abordăm ambele prin reducere la absurd. Negând $B \rightarrow A$ obținem $B \wedge \neg A$ (ipoteza și negația concluziei). Pentru $\neg A$ obținem:

$\neg\forall x \,.\, \exists y(m(y) \wedge c(x, y)) \rightarrow \exists z \,.\, m(z) \wedge \neg c(x, z) = \exists x \,.\, \exists y(m(y) \wedge c(x, y)) \wedge \neg\exists z \,.\, m(z) \wedge \neg c(x, z)$
$= \exists x \,.\, \exists y(m(y) \wedge c(x, y)) \wedge \forall z \,.\, \neg m(z) \vee c(x, z)$

Eliminăm cuantificarea existențială prin skolemizare. În $\neg A$ avem două constante pentru x și y: $m(b) \wedge c(a, b) \wedge \forall z \,.\, \neg m(z) \vee c(a, z)$. În B, avem o funcție $p(x)$ care ne dă un meci pierdut de x: $\forall x \,.\, m(p(x)) \wedge \neg c(x, p(x))$. Eliminăm $\forall$ și obținem forma clauzală pentru $\neg A \wedge B$:

$m(b)$
$\wedge\ c(a, b)$
$\wedge\ \neg m(z) \vee c(a, z)$
$\wedge\ m(p(x))$
$\wedge\ \neg c(x, p(x))$

Aplicând metoda rezoluției, și unificând clauza 3 cu 4 obținem, cu $z = p(x)$, clauza $c(a, p(x))$. Unificând cu clauza 5, obținem (cu $x = a$) clauza vidă și contradicția dorită. Deci $B \rightarrow A$.

Implicația e evidentă și informal: Nimeni nu a câștigat toate meciurile, deci fiecare a pierdut măcar un meci, în particular și oricine a câștigat un meci (A). Nici în demonstrația dinainte nu am folosit clauzele 3 și 4 care exprimă premisa (nefolosită) a lui A. Raționamentul e de tipul: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (ceea ce ne amintim că era una din axiomele logicii propoziționale si a predicatelor).

Încercăm să demonstrăm $A \rightarrow B$ obținând o contradicție din $A \wedge \neg B$. Eliminăm implicația din A: $\forall x \,.\, \neg\exists y(m(y) \wedge c(x, y)) \vee \exists z \,.\, m(z) \wedge \neg c(x, z) = \forall x \,.\, \forall y(\neg m(y) \vee \neg c(x, y)) \vee \exists z \,.\, m(z) \wedge \neg c(x, z)$. Scriem pe $\neg B$: $\exists x\forall y \,.\, m(y) \rightarrow c(x, y) = \exists x\forall y \,.\, \neg m(y) \vee c(x, y)$. Skolemizăm: în A, $p(x)$ e meciul pierdut de x; în $\neg B$, a e o constantă pentru x. Redenumind pe y din $\neg B$ obținem forma clauzală pentru $A \wedge \neg B$ (de reținut că skolemizarea se face numai după au rămas doar $\vee$ și $\wedge$, cu toate negațiile duse înăuntru):

$(\neg m(y) \vee \neg c(x, y) \vee m(p(x)))$
$\wedge\ (\neg m(y) \vee \neg c(x, y) \vee \neg c(x, (p(x)))$
$\wedge\ (\neg m(z) \vee c(a, z))$

Unificând 1 și 3 (cu toți trei m) obținem $\neg c(x, y) \vee c(a, y)$. Unificând 2 și 3 (cu toți trei c) obținem $\neg m(p(a))$, etc. Totuși, nu obținem clauza vidă, în particular nu "dispar" literalii $\neg m(...)$ prezenți în toate trei clauzele inițiale.

Aceasta ne indică problema: $A \wedge \neg B$ *nu* e o contradicție într-un univers în care nu sunt meciuri! Atunci A e adevărată (fals implică orice), dar B e falsă, fiindcă nu există y cu $m(y)$!

Adăugând constrângerea $\exists y\ m(y)$, skolemizată ca $m(b)$, rezoluția ne duce ușor la clauza vidă.

Acesta nu e un paradox. Recitind definiția unei interpretări, remarcați că universul U trebuie să fie nevid. Nu este necesar însă ca el să conțină câte un element de orice fel (meciuri, sau cai verzi). În practică, putem obține raționamente false bazându-ne pe existența unui obiect care satisface o condiție (posibil complicată și cu erori), dacă de fapt acea condiție nu e realizabilă.

Informal, suntem tentați să demonstrăm B (oricine are un meci pe care l-a pierdut) în felul următor: *oricine fie a câștigat fie a pierdut un meci.* Dacă l-a pierdut, avem concluzia dorită, iar dacă l-a câștigat, A ne asigură că a pierdut alt meci. Eroarea (greu de observat) e în premisa despărțirii în două cazuri (evidențiate mai sus): ea presupune că există meciuri. Aceasta ne arată importanța formalizării.

La examen s-a punctat încercarea de a demonstra echivalența (chiar argumentată informal). Majoritatea au afirmat-o însă fără vreun argument, sau au arătat doar o implicație, nu amândouă.

Două (sau mai multe) afirmații sunt consistente dacă nu duc la o contradicție. Era suficient de indicat un (mic) exemplu (o *interpretare*) în care A și B sunt adevărate.