Formalizarea în logică

Când vrem să transcriem niște afirmații din limbaj natural în logica predicatelor, respectăm niște reguli, unele din ele importante și foarte firești, pe care le putem folosi și în alte locuri.

Ceva complex trebuie descompus în părți mai simple Pentru *fraze*, aceasta înseamnă să le descompunem în *propoziții* sau alte părți mai mici din care sunt formate.

Exemplu[1]: *If every child who is not a city child is good, then every child gets some toy.*
Fraza are structura *Dacă A, atunci B*, deci formula va fi $A \to B$. Propozițiile A și B au fiecare un înțeles de sine stătător: *Orice copil care nu e de la oraș e bun*, și *Orice copil primește o jucărie.* Observația e importantă, ea ne permite să traducem *separat* propozițiile A și B, mai simple decât fraza inițială, și apoi doar să legăm formulele rezultate prin implicație.

Propozițiile A și B de mai sus fiind independente, "orice copil" din prima propoziție nu are legătură cu copilul din a doua. În formalizare apar doi cuantificatori universali diferiți în formule distincte.

$\forall$ apare cu $\to$ iar $\exists$ apare cu $\wedge$ *Orice copil e bun* se traduce $\forall x(copil(x) \to bun(x))$. Cuantificarea $\forall x$ spune că formula următoare e adevărată pentru orice x *din universul valorilor.* Dar nu toate valorile din univers sunt neapărat copii, deci nu e suficient să scriem $\forall x\, bun(x)$! Afirmația că x e bun e valabilă doar dacă x e copil, de aici implicația. O eroare frecventă la început e a considera că ambele afirmații despre x sunt pozitive (lipsind negația), deci legate prin "și": $\forall x(copil(x) \wedge bun(x))$. Această formulă e sintactic corectă, dar înseamnă altceva: că orice x din univers e și copil, și bun (deci universul nu conține niciun fel de alte lucruri – departe de orice realitate și de afirmația inițială).
Există un copil bun se traduce $\exists x(copil(x) \wedge bun(x))$: există un element din univers care e copil și e bun. Aici și intuiția ne conduce la scrierea corectă. Să ne convingem că $\exists x(copil(x) \to bun(x))$ înseamnă altceva (există cineva care dacă e copil e bun): rescriind implicația, obținem $\exists x(\neg copil(x) \vee bun(x))$, afirmație adevărată dacă există ceva care nu e copil, sau dacă există ceva (orice, nu neapărat copil) care e bun – din nou, cu totul altceva decât afirmația inițială.

Atenție la sensul cuvintelor în limbaj natural Uneori, același cuvânt în limbaj natural poate avea înțeles diferit, dependent de context. *Orice copil care primește orice jucărie e fericit.* Primul "orice" (copil) are sens de cuantificator universal. Al doilea are înțeles de singular (o jucărie oarecare), deci devine cuantificator existențial: $\forall x(copil(x) \wedge \exists y(juc(y) \wedge pr(x, y)) \to f(x))$. Traducând al doilea "orice" prin $\forall$ am obține în interior $\forall y(juc(y) \to pr(x, y))$, deci x e fericit doar dacă primește toate jucăriile din univers. Deși afirmația inițială e ușor ambiguă ("primește *o* jucărie" ar fi mai clar), probabil sensul intenționat nu e "toate jucăriile".

Punctul elimină din paranteze, *nu* leagă cuantificatorul doar de următorul predicat Cuantificatorii $\forall$ și $\exists$ au precedență maximă (ca și negația, operator unar prefix). $\forall x$ se scrie direct înainte de formula cuantificată. Scriind $\forall x\, P(x) \wedge Q(x)$, sensul e $(\forall x\, P(x)) \wedge Q(x)$, unde x din Q e altă variabilă, liberă. Ca să cuantificăm întreaga formulă, trebuie să scriem $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$. Convențional, evitând excesul de paranteze, un punct după variabila cuantificată înseamnă că domeniul cuantificatorului se întinde până la prima paranteză închisă care *nu* aparține formulei cuantificate, sau, în lipsa ei, până la sfârșit. Putem scrie astfel $\forall x\,.\, P(x) \wedge Q(x)$. Pentru exemplul considerat la început, putem scrie: $\forall x(child(x) \wedge \neg cityc(x) \to good(x)) \to \forall x(child(x) \to \exists y.toy(y) \wedge gets(x, y))$.

Nu avem vreun operator după $\forall x$ sau $\exists x$ Sintaxa pentru cuantificator e $\forall x$ *formulă*. Nu e corect scris $\cancel{\forall x \to bun(x)}$ pentru că $\cancel{\to bun(x)}$ nu e o formulă. Nu e corect nici $\cancel{\exists x \to (copil(x) \wedge bun(x))}$ din același motiv. Putem spune "există x astfel încât e bun", dar "astfel încât" e doar un conector între "există x" și "e bun", care apare în vorbire dar nu în sintaxa formală, și nu are sens de implicație.

În logica de ordinul I nu putem cuantifica predicate Nu putem scrie $\cancel{\forall om(x) \to bun(x)}$. După $\forall$ și $\exists$ urmează o variabilă. Deci $\forall x(om(x) \to bun(x))$ sau mai bine lizibil, $\forall x.\, om(x) \to bun(x)$.

Atenție la ordinea cuantificatorilor *Every roommate of every CS major likes to party.* Subiectul e colegul de cameră, dar el e definit prin această calitate doar în raport cu un student la informatică. Deci traducerea directă îl introduce pe acesta întâi: $\forall x\,.\, CSmaj(x) \to \forall y\,.\, rm(y, x) \to lp(y)$ Putem însă porni și de la colegul de cameră, și îl caracterizăm prin *existența* unui student la informatică cu care e coleg: $\forall y\,.\, \exists x(CSmaj(x) \wedge rm(y, x)) \to lp(y)$ În fine, putem introduce ambele variabile (în orice ordine) și impune apoi constrângerile între ele: $\forall x \forall y\,.\, CSmaj(x) \wedge rm(y, x) \to lp(y)$. Putem verifica echivalența dintre cele formulări transformându-le în formă clauzală.

[1]Unele exemple sunt preluate de la `http://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html`

Scrieți formula pas cu pas, pentru a evita greșeli *Oricine a citit toate cărțile e un învățat.* Fraza ne spune: oricine îndeplinește o anume condiție e învățat. Deci formula va avea structura: $\forall x\ \boxed{\text{condiție pt. } x} \rightarrow inv(x)$. Apoi scriem condiția: "x a citit toate cărțile": $\forall y\,.\,carte(y) \rightarrow citit(x,y)$. Deci, $\forall x\,.\,(\forall y\,.\,carte(y) \rightarrow citit(x,y)) \rightarrow inv(x)$ sau $\forall x(\forall y(carte(y) \rightarrow citit(x,y)) \rightarrow inv(x))$. Atenție, scriind direct $\forall x \forall y\,.\,carte(y) \rightarrow citit(x,y) \rightarrow inv(x)$ sau echivalent, $\forall x \forall y(carte(y) \wedge citit(x,y) \rightarrow inv(x))$ obținem alt înțeles! Să vedem ce înseamnă această ultimă formulă: oricum am alege x și y astfel încât y să fie carte și x să fi citit y, rezultă că x e învățat. Deci e suficient să alegem *o carte* citită de x, nu e nevoie să fi citit toate cărțile!

Putem vedea că formulele sunt diferite și transformându-le

$$\begin{array}{rl} (1) & \forall x(\forall y(carte(y) \rightarrow citit(x,y)) \rightarrow inv(x)) \\ = & \forall x(\neg\forall y(carte(y) \rightarrow citit(x,y)) \vee inv(x)) \\ = & \forall x(\exists y\neg(carte(y) \rightarrow citit(x,y)) \vee inv(x)) \\ = & \forall x(\exists y(carte(y) \wedge \neg citit(x,y)) \vee inv(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (2) & \forall x\forall y(carte(y) \wedge citit(x,y) \rightarrow inv(x)) \\ = & \forall x\forall y(\neg(carte(y) \wedge citit(x,y)) \vee inv(x)) \\ = & \forall x\forall y(\neg carte(y) \vee \neg citit(x,y) \vee inv(x)) \end{array}$$

Vedem că după ce am transformat implicația și am dus negația până la predicate, y în formula (1) e cuantificat existențial, iar în (2), universal.

Skolemizând (1), ajungem la forma clauzală $(carte(f(x)) \vee inv(x)) \wedge (\neg citit(x, f(x)) \vee inv(x))$ pe când (2) ne dă $\neg carte(y) \vee \neg citit(x,y) \vee inv(x)$.

Luând (2) adevărată, pentru a avea $inv(x)$ e suficient să avem un y astfel încât $carte(y)$ și $citit(x,y)$: primii doi literali din clauză fiind falși, trebuie $inv(x)$ pentru a face clauza adevărată. Deci e suficientă *o* carte citită pentru ca x să fie învățat – nu acesta e înțelesul afirmației inițiale.

Luând însă (1), ca să avem $inv(x)$ e suficient să nu existe cărți (atunci $carte(f(x))$ e fals, deci $inv(x)$ adevărat, din prima clauză), sau ca x să fi citit tot (atunci și $citit(x, f(x))$ e adevărat, negația e falsă, deci din clauza 2, $inv(x)$ e adevărat). Reciproc, dacă $inv(x)$ e fals, atunci din (1), $f(x)$ e o carte necitită de x. Deci dacă x citește toate cărțile, $inv(x)$ e adevărat – acesta e sensul afirmației inițiale.

Deci formulele (1) și (2) au înțeles foarte diferit, deși singurul lucru care diferă în scrierea inițială e poziția unor paranteze!

Negarea unei formule cuantificate schimbă cuantificatorul
$\neg\forall x\boxed{\text{formulă}} = \exists x\,\neg\,\boxed{\text{formulă}}$ $\neg\exists x\boxed{\text{formulă}} = \forall x\,\neg\,\boxed{\text{formulă}}$

Transformând *interiorul* unei formule cuantificate *nu* se schimbă cuantificatorul
$\forall x\boxed{\text{formulă}} = \forall x\boxed{\text{formulă transformată}}$ E evident: lucrând doar cu partea independentă de cuantificator (din interiorul acestuia) nu e niciun motiv să se schimbe cuantificatorul, să apară negații în exterior, etc. Un exemplu e (2) mai sus: transformarea implicației nu schimbă cuantificatorii $\forall x \forall y$.

Pentru a demonstra prin reducere la absurd, întâi negăm concluzia Demonstrația prin reducere la absurd înseamnă să presupunem toate *ipotezele adevărate*, și *concluzia falsă*, și să obținem (prin rezoluție) o contradicție. Primul pas e să negăm concluzia, înainte de orice altă transformare, skolemizare, etc. În caz contrar, nu obținem rezultatul corect.

Pe un exemplu simplu: dacă concluzia e $\forall x \exists y P(x,y)$, negația dă $\neg\forall x\exists y P(x,y) = \exists x \forall y \neg P(x,y)$. Șkolemizând, x din exterior e o constantă a, și avem clauza unitate $\neg P(a,y)$.

Dacă însă skolemizăm formula ca atare, y e funcție de x, și avem $\cancel{P(x, f(x))}$. Negând în acest moment, obținem $\cancel{\neg P(x, f(x))}$, ceea ce deși are tot P negat, e greșit, complet altceva, și va duce la un raționament și/sau rezultat incorect.