Logică și structuri discrete

Gramatici

Marius Minea
marius@cs.upt.ro

http://cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/

5 decembrie 2016

Limbaje, automate finite și expresii regulate

Automatele pot descrie comportamentul unui sistem simplu.
din fiecare stare s, intrarea σ determină starea următoare s'

Un automat *recunoaște* un limbaj (face parte șirul din limbaj?)
ex. text cu comentarii încheiate corect

Traductoare: automate care produc ieșiri (în funcție de intrare)
putem *prelucra* limbaje (ex. elimina comentarii)

Expresii regulate reprezintă concis automate, deci *limbaje regulate*
putem recunoaște șiruri cu o anumită structură (ex. număr real)

În general, dorim să
recunoaștem dacă un șir aparține unui limbaj,
generăm șiruri dintr-un limbaj
sau să *transformăm* astfel de șiruri

Limbaje care nu sunt regulate

Există limbaje foarte simple care nu sunt regulate:

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ paranteze echilibrate

$\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ cuvânt, apoi același repetat

$\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ cuvânt, apoi inversat

Automatele finite au *memorie finită*
număr finit de stări $\Rightarrow$ nu pot *număra* mai mult de atât

Limbajele regulate au proprietatea (*pumping lemma*):
orice cuvânt suficient de lung conține un subșir ce poate fi repetat

$\exists p \in \mathbb{N}$ astfel ca orice cuvânt w cu $|w| \geq p$ (destul de lung)
are forma $w = xyz$ cu

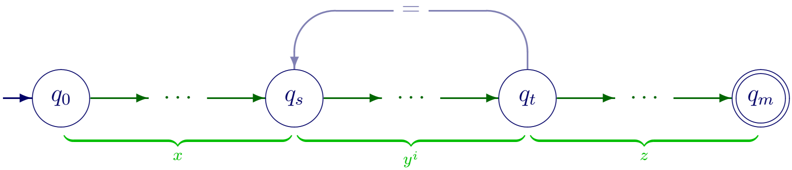
$|y| \geq 1$ se repetă un subșir cu ≥ 1 simbol
$|xy| \leq p$ începe înainte de limita p
$\forall k \geq 0 \,.\, xy^k z \in L$ y poate fi repetat arbitrar între x și z

Lema de pompare pentru limbaje regulate

Fie un limbaj regulat și automatul care-l recunoaște.
Alegem *lungimea de pompare* $p =$ numărul de stări din automat.
Fie șirul $a_1 a_2 ... a_m$ cu $m \geq p$, și stările parcurse de automat:

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \ldots \xrightarrow{a_m} q_m$$

Avem $m + 1 > p$ stări, deci cel puțin o stare se repetă:
$q_s = q_t$ cu $s, t \leq m$



https://en.wikipedia.org/wiki/Pumping_lemma_for_regular_languages

Parcurgând șirul $y = a_{s+1} ... a_t$ din q_s ajungem înapoi în $q_t = q_s$
deci putem repeta șirul y, și $xy^i z$ e în limbajul acceptat, q.e.d.

Exemplu: $a^n b^n$ nu e limbaj regulat

$a^n b^n$: *numărăm* câți a apar, verificăm că sunt la fel de mulți b.

Dar: n nu e limitat, și ne-ar trebui *o stare pentru fiecare număr* (un automat nu distinge decât prin starea în care se află, comportamentul său e determinat doar de stare)

Demonstrăm prin *reducere la absurd*, folosind lema de pompare.

Fie un automat determinist cu *n stări* care accepta limbajul.
Fie șirul $a^n b^n$ (cu același n) și stările $s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{a} \ldots \xrightarrow{a} s_n$.

Din $n+1$ stări, doar n pot fi diferite: fie $i < j$ cu $s_i = s_j$.

Atunci șirul a^{j-i} duce automatul din s_i în aceeași stare ($s_j = s_i$).

Repetăm șirul incă o dată din s_i: automatul va accepta $a^{n+j-i} b^n$, cu mai mulți a decât $b \Rightarrow$ *contradicție*.

Avem limbaje simple care nu sunt regulate $\Rightarrow$ trebuie alt formalism

Limbajele de programare trebuie descrise precis

Din standardul C:

(6.8.4) *selection-statement:*

`if` **`(`** *expression* **`)`** *statement*
`if` **`(`** *expression* **`)`** *statement* **`else`** *statement*
`switch` **`(`** *expression* **`)`** *statement*

(6.8.5) *iteration-statement:*

`while` **`(`** *expression* **`)`** *statement*
`do` *statement* **`while`** **`(`** *expression* **`)`** **`;`**
`for` **`(`** $expression_{opt}$ **`;`** $expression_{opt}$ **`;`** $expression_{opt}$ **`)`** *statement*
`for` **`(`** *declaration* $expression_{opt}$ **`;`** $expression_{opt}$ **`)`** *statement*

Sintaxa limbajelor de programare e descrisă prin *gramatici*.

Gramatica limbajului natural

Exemplu: propoziții în limba engleză (mult simplificat)

A good student reads books.

$S \to NP\ VP$	noun phrase + verb phrase
$NP \to subst$	substantiv
$NP \to det\ NP$	cu parte determinantă (art/adj)
$VP \to verb$	predicat: doar verb
$VP \to verb\ NP$	predicat: cu complement direct

simboluri care apar în stânga $\to$ (sunt înlocuite): *neterminale*
simboluri care apar numai în dreapta $\to$: *terminale*

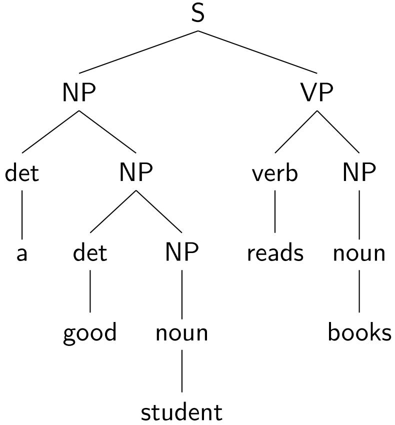
Orice limbaj e descris prin *simbolurile* sale și *sintaxa*: *regulile* prin care pot fi combinate acele simboluri.

O *gramatică* descrie cum se obțin șirurile unui limbaj prin *reguli de producție* (*reguli de rescriere*) pornind de la un *simbol de start*

Arborele de derivare

O *derivare* a unui șir dintr-o gramatică e aplicarea unui *șir de reguli* care transformă simbolul de start al gramaticii în șirul dat. (indicând la fiecare pas și simbolul transformat)

Arborele de derivare e o reprezentare ierarhică a unei derivări, scriind partea dreaptă a fiecărei reguli sub partea stângă:



A good student reads books.

S → NP VP

NP → det NP   VP → verb NP

NP → det NP   NP → noun

NP → noun

Exemple de limbaje definite prin gramatici

Șirurile de paranteze echilibrate:
orice paranteză deschisă (are o pereche închisă)
o paranteză se închide *după* închiderea celor deschise după ea

$S \to \epsilon$ (notație pentru șirul vid)
$S \to (S)S$

O posibilă derivare: $\underline{S} \xrightarrow{2} (\underline{S})S \xrightarrow{2} ((\underline{S})S)S \xrightarrow{1} (()\underline{S})S \xrightarrow{1} (())\underline{S} \xrightarrow{2} (())(\underline{S})S \xrightarrow{1} (())()\underline{S} \xrightarrow{1} (())()$

la fiecare pas, am subliniat neterminalul transformat, am indicat regula folosită $\xrightarrow{1}$ sau $\xrightarrow{2}$ și am colorat albastru în ce se transformă

$\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ cuvânt+invers (palindrom, lungime pară)

$S \to \epsilon$
$S \to aSa$
$S \to bSb$

Ierarhia Chomsky [după Noam Chomsky]

Notăm:

litere mari: neterminale; mici: terminale; grecești: șiruri arbitrare

3) gramatici *regulate*: generează *limbajele regulate*:
reguli de forma $A \to a$ și $A \to aB$ (regulate la dreapta)
alternativ: $A \to a$ și $A \to Ba$ (regulate la stânga)
dar nu amândouă combinat!

2) gramatici *independente de context*
reguli: $A \to \gamma$ stânga: neterminal; dreapta: șir arbitrar

1) gramatici *dependente de context*
reguli: $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$
A e rescris doar când apare între α și β
$\gamma \neq \epsilon$ (nevid), sau $S \to \epsilon$ doar dacă S nu apare în dreapta

0) gramatici nerestricționate (orice reguli de rescriere)
limbaje *recursiv enumerabile* (recunoscute de o mașină Turing)

Gramatică formală

O gramatică formală G e formată din:

Σ: o mulțime de simboluri *terminale*
(din care se formează șirurile limbajului)
N: o mulțime de simboluri *neterminale*, $N \cap \Sigma = \emptyset$
(folosite doar în descrierea gramaticii)
P: o mulțime de *reguli de producție*, de forma
$(\Sigma \cup N)^* N (\Sigma \cup N)^* \to (\Sigma \cup N)^*$
un neterminal N, eventual într-un context (șir în stânga/dreapta)
e rescris cu un șir de terminale și neterminale
$S \in N$: un *simbol de start*

Limbajul definit de G e format din toate șirurile de *terminale* care se pot obține din S aplicând oricâte reguli

Forma Backus-Naur (BNF)

dupa John Backus (dezvoltatorul limbajului FORTRAN)
și Peter Naur (ALGOL 60) (fiecare: premiul *Turing*)

Notație frecvent folosită pentru gramatici independente de context

folosește `::=` pentru definiție și `|` pentru alternativă

Neterminal ::= rescriere1 | rescriere2 | ... | rescriereN

uneori folosite cu extensii:
- [*element-opțional*]
- *simbol** (steaua Kleene) pentru repetiție
- *simbol*+ (plus) pentru repetiție cel puțin odată
- paranteze pentru gruparea elementelor

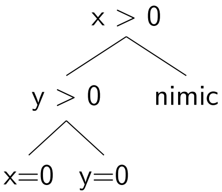
Exemple: instrucțiuni în C (simplificat)

Stmt ::= ExpStmt | IfStmt | WhileStmt | Block
ExpStmt ::= expr ;
IfStmt ::= **`if`** (expr) Stmt **`else`** Stmt | **`if`** (expr) Stmt
WhileStmt ::= **`while`** (expr) Stmt
Block ::= { Stmt* }

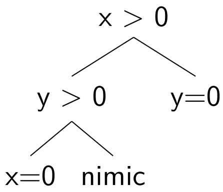
Problema: cu care **`if`** se potrivește **`else`** ?

```
if (x > 0) if (y > 0) x = 0; else y = 0;
```

Gramatica e *ambiguă*:
există șiruri cu mai mulți *arbori de derivare* (arbori sintactici)



interpretarea corectă



interpretare incorectă (trebuie eliminată)

Dezambiguarea gramaticii

Pentru a dezambigua gramatica, trebuie rescrisă: distingem între

- un `if` *echilibrat*, care are `else`
- un `if` *neechilibrat*, fără `else`

Cum `else` e asociat cu cel mai apropiat `if`, ramura `then` e *întotdeauna echilibrată* (definim echilibrate restul de instrucțiuni).

Stmt ::= BalancedStmt | UnBalancedIf

BalancedStmt ::= ExpStmt | WhileStmt | Block | BalancedIf

ExpStmt ::= expr ;

WhileStmt ::= `while` (expr) Stmt

Block ::= { Stmt* }

BalancedIf ::= `if` (expr) BalancedStmt `else` Stmt

UnBalancedIf ::= `if` (expr) Stmt

Expresii aritmetice

v1) E ::= num | E + E | E - E | E * E | E / E | (E)

și aici avem *ambiguitate*:

nu e precizată precedența operatorilor

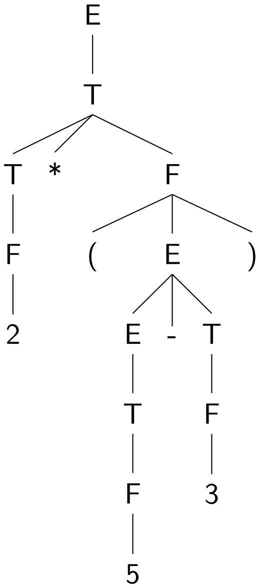
v2) Rescriem pe 3 nivele de *precedență*:

E ::= T | E + T | E - T

T ::= F | T * F | T / F

F ::= num | (E)

Exemplu: `2 * (5 - 3)`



v3) Eliminăm și *recursivitatea la stânga*
(E apare în stânga producțiilor lui E)

E ::= T RestE

RestE ::= ϵ | + T RestE | - T RestE

T ::= F RestT

RestT ::= ϵ | * F RestT | / F RestT

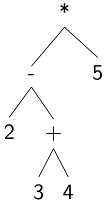
F ::= num | (E)

Expresii prefix și postfix

nu necesită paranteze, subexpresiile reies din structură

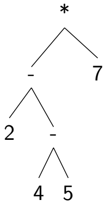
Expresii *prefix*:
E ::= num | Op E E
Op ::= + | - | * | /

`* - 2 + 3 4 5` = `(2 - (3 + 4)) * 5`



Expresii *postfix*:
E ::= num | E E Op
Op ::= + | - | * | /

`2 4 5 - - 7 *` = `(2 - (4 - 5)) * 7`



Scrierile se pot obține prin traversarea arborelui expresiei:
- în *preordine*: întâi operatorul, apoi subexpresiile (în același fel)
- în *postordine*: întâi subexpresiile (în același fel), apoi operatorul